平成13年度 石田(實)記念財団研究発表会

適合原理によるクリティカル制御系の設計に関する研究

石原 正

東北大学大学院情報科学研究科
〒980-8579 仙台市青葉区青葉山 01

1. はじめに

実際の制御系設計では，多くの場合，所望の制御性能さえ得られれば，最適性に拘る必要は無い．また，最適制御系を構成しようとしても，コントローラの構造が複雑過ぎて実装に適さない場合もある．最適制御理論は達成可能な制御性能を明らかにする意味で重要であるが，実際の制御系設計では種々の制約を考慮した上で，適切なコントローラを設計することが要求される．

英国のZakian[4)15)]は，適切な制御系を設計するためには，制御対象のモデル化のみならず，外部入力(目標値，外乱等)を発生する「環境」のモデル化も必要であることに着目し，新しい設計論の枠組みとして，「適合原理」を提唱している．特に，この設計原理が「クリティカル制御系」の設計に極めて有効であることが明らかにされている．この原理による設計は最終的にはZakian[1)]が1970年代に提唱した「不等式制約法」による制御系設計に帰着される．

本研究では，以下の二つのテーマについて研究を行った．

A. 適合原理に基づくクリティカル・サンプル値制御系の設計

B. 線形行列不等式によるクリティカル値制御系の設計

本稿では，まず，適合原理に基づく制御系設計法について述べ，次に上記の研究テーマに対する研究成果の概略について報告する．

2. 適合原理

A. 制御系と環境

適合原理[4)9)15)]では，制御対象とコントローラから成る「制御系」と制御系へ外部から加わるの入力信号を発生する「環境」を考える．環境からの入力に対する制御系の性能は制御系内の複数個の信号により評価されるものとする．これらの信号を環境からの入力に対する制御系の「応答」と呼ぶ．Fig.1に示される直結フィードバック系では，目標値信号および制御対象出力に加わる外乱が環境により生成される入力であり，応答としては，例えば，偏差および操作量を選ぶことが考えられる．

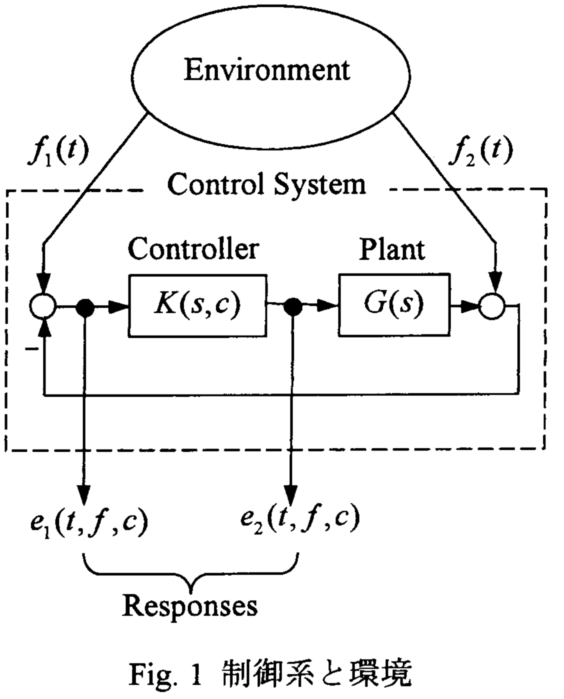

Fig. 1 制御系と環境

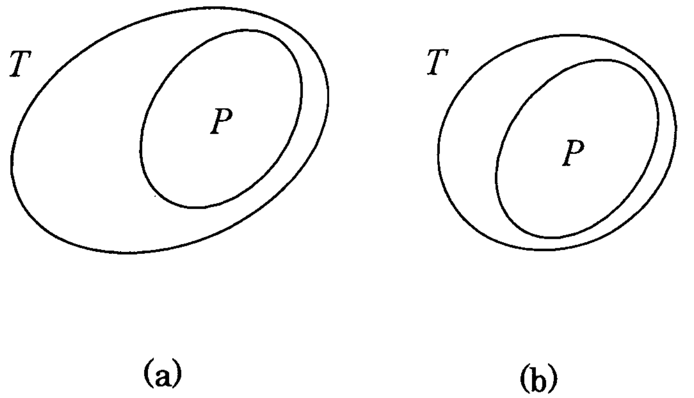

Fig.2 制御系と環境の適合

B. 生起可能集合と許容入力集合

制御系に加わる入力fが環境から生じ，fに対して制御系が応答するものとする．入力fはPで表される生起可能集合(possible set)に属することのみ知られていると仮定する．適当な(複数個の)評価基準を用いることにより，ある入力に対する制御系の応答が許容されると判断されるとき，その入力を許容入力(tolerable input)とよぶ．また，全ての許容入力からなる集合を許容入力集合とよびTで表す．

C. 制御系と環境との適合

生起可能集合Pが許容入力集合Tの部分集合，すなわち，$P \subseteq T$ならば，制御系と環境は適合しているという．また，そのときの制御系を適合系(matched system)と呼ぶ．制御系設計をこの適合の概念に基づいて行おうとするのが適合原理である．Fig. 2(a)のように，集合Tが集合Pに属さない入力信号を数多く含む場合，制御系は，与えられた設計仕様と生起可能集合に関して適合はしているものも，過度な制御性能を備えていると言える．これに対して, Fig. 2(b)のように$P \subseteq T$で二つの集合が十分に近い場合には，適切な適合(well match)が達成されていると言える．適切な適合を達成するのが適合原理に基づく制御系設計の目標である．

適合原理を実際に用いるためには，適合条件$P \subseteq T$を数値的に判定する必要がある．現在のところ，応答の上限値に対する制約で与えられる設計仕様といくつかの入力信号のクラスに対する適合条件が導かれている(後述).

D. 従来の設計法との比較

線形制御理論では外部入力の大きさはコントローラの決定に影響を与えない．H^{∞}制御理論をはじめとする最近の線形制御理論では，制御目的に応じて，制御系の入出力関係に対するノルムの種類を選択する必要があるが，入力信号の定量的性質を明確に規定することは必ずしも要求されない．しかし，実際の制御系設計では，例えば，操作量の飽和に対処するために，外部入力の大きさに関する情報が必要となる．多くの場合，これらの情報は設計者により，シミュレーションによるコントローラの最終調整に用いられるだけであり，設計の主要部分では無視されるのが普通である．これに対して，適合原理に基づく設計では，外部入力を定量的に評価し，直接的に設計に用いることが要求される．

3. クリティカル制御系

A. 適合条件

可調整パラメータcを含む制御系に対して入力fが加わるものとする．この時，制御性能の評価の対象となる複数個の応答を$e_i(t,f,c)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$で表す．制御系の設計仕様はこれらの応答に対する次のような時間領域における不等式で与えられるものとする．

$$\| e_i(f,c) \|_\infty \equiv \sup\{|e_i(t, f,c)|: t \geq 0\} \leq \varepsilon_i \tag{1}$$

ここで，ε_iは設計者により与えれる非負の実数である．式(1)の制約は，応答$e_i(t,f,c)$の絶対値がすべての時間において臨界値ε_i以下であることを要求するものであり，実システムの制御問題でしばしば必要とされる．Zakian[4)]は式(1)のような制約が要求される制御系をクリティカル制御系(Critical Control System)と呼んでいる．

さて，式(1)に対する許容入力信号の集合Tは次のように与えられる．

$$T_c \equiv \{f: \| e_i(f,c) \|_\infty \leq \varepsilon_i,\ i=1, 2, \ldots, m\} \tag{2}$$

このとき，次の結果が成立することが容易に確かめられる．

結果 1[4)]: 制御系の応答$e_i(t,f,c)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$と生起可能集合Pとに対して次の量を定義する．

$$\hat{e}_i(P,c) \equiv \sup\{\| e_i(f,c) \|_\infty : f \in P\} \tag{3}$$

このとき，

$$P \subseteq T_c \Leftrightarrow \hat{e}_i(P,c) \leq \varepsilon_i,\ i=1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

が成立する．■

上の結果は式(3)の値が計算可能であれば，設計仕様ε_iと比較することに数値的に適合を判定することができることを示している．

B. 生起可能集合と適合条件

現在までに，いくつかの入力集合を生起可能集合として採用した場合に対して式(3)で定義される上限値が求められている．

以下の議論では，簡単のために入力fはスカラー関数であると仮定し，式(3)の添え字iは省略する．また，制御系は線形時不変系であり，すべての初期値は0と仮定する．従って，入力fと応答$e(t,f,c)$の関係は次のようなたたみ込み積分で表されるものとする．

$$e(t,f,c) = \int_0^t e(t-\lambda, \delta, c) f(\lambda) d\lambda \tag{5}$$

ここで，$\delta(\cdot)$は単位インパルス信号でり$e(t,\delta,c)$は制御系の単位インパルス応答である．

a. 振幅を制限した入力集合

入力信号に対する最も簡単な制約は振幅を制限することである．このような信号に対しては次の関係が成立する．

結果 2: 振幅が有界な入力集合

$$F_\infty(M) \equiv \{f: \|f\|_\infty \le M, f(0)=0\} \tag{6}$$

に対しては

$$\hat{e}(F_\infty(M),c) = \|e(\delta,c)\|_1 M \tag{7}$$

である．ただし,

$$\|e(\delta,c)\|_1 = \int_0^\infty |e(t,\delta,c)| dt \tag{8}$$

である． □

式(7)が示すように，式(6)で与えられる生起可能集合に対する適合条件は有限個の可調整パラメータcを含むコントローラと制御対象からなる閉ループ系のインパルス応答のL^1ノルムにより評価できる．

有界な入力集合$F_\infty(M)$はステップ状に変化する入力のように変化量が非常に大きい入力関数をも含む．生起可能集合として$F_\infty(M)$を採用した場合，クリティカル制御系では次のようなことが起こる．

例 1: Fig. 1の直結フィードバック系で$f_1 = f \in F_\infty(M)$，$f_2 = 0$，$G(s) = 1/s$，$K(s,c) = c > 0$の場合を考える．このとき，入力$f(t)$から応答(目標値信号に対する追従誤差)$e_1(t,f,c) \equiv e(t)$への伝達関数は$s/(s+c)$で与えられる．従って,

$$e_1(t,\delta,c) = \delta(t) - ce^{-ct} \tag{9}$$

であり，式(7)から,

$$\hat{e}_1(F_\infty(M),c) = \begin{cases} 2M, & c>0 \\ M, & c=0 \end{cases} \tag{10}$$

が成立する．式(10)から，$\hat{e}_1(F_\infty(M),c)$の値は$c>0$のときのcに依存せず，$c=0$の時最小値Dをとる．この制御系の目的(目標値追従)からすれば，設計仕様は少なくとも$\varepsilon_1 < D$を満足する必要がある．しかし，式(10)から，このような設計仕様を満足する可調整パラメータcは存在しない． □

上の結果はより一般的な制御系に対しても成立する．従って，入力集合$F_\infty(M)$を生起可能集合として採用する場合には注意が必要である．

b. 変化率を制限した入力集合

例1が示すような問題点を回避するためには，入力関数の変化量に制約を加えた入力集合を生起可能集合として採用することが考えられる．このような入力集合に対して適合条件を導くために，式(5)の関係は単位ステップ信号hを用いて次のように書き換えられることに注意しよう．

$$e(t,f,c) = \int_0^t e(t-\lambda,h,c) f^{(1)}(\lambda) d\lambda \tag{11}$$

ここで，$e(t,h,c)$は制御系の単位ステップ応答である．この関係を用いると，結果2の証明と同様の手法で次の結果を証明できる．

結果 3[9)15)]: 入力fの1回微分$\dot{f}$に制約を与えた次のような2つの入力集合を考える．

$$\tilde{F}_\infty(D) \equiv \{f: \|\dot{f}\|_\infty \le D, f(0)=0\} \tag{12}$$

$$\tilde{F}_2(D) \equiv \{f: \|\dot{f}\|_2 \le D, f(0)=0\} \tag{13}$$

このとき

$$\hat{e}(\tilde{F}_\infty(D),c)=\|e(h,c)\|_1 D \tag{14}$$

$$\hat{e}(\tilde{F}_2(D),c)=\|e(h,c)\|_2 D \tag{15}$$

が成立する．ただし，$h(\cdot)$は単位ステップ信号であり

$$\|e(h,c)\|_1=\int_0^\infty |e(t,h,c)|dt \tag{16}$$

$$\|e(h,c)\|_2=\left(\int_0^\infty e^2(t,h,c)dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

である．■

上の結果は，変化量に制約を加えた入力集合を生起可能集合として選んだ場合，適合条件はステップ応答のノルムを用いて与えられることを示している．これらのノルムが有限であるためにはステップ応答の定常値が0であることが要求されることに注意しよう．

$\tilde{F}_\infty(D)$は変化量がD以下の持続的変動を表す．一方，入力集合$\tilde{F}_2(D)$は変化量の2乗ノルムがD以下である過渡的な変動を表す．過渡的変動と持続的変動の両者を含む入力集合に対する結果として，次の結果が知られている．

結果 4[9)15)]: 変化率に制限のある次のような入力集合$\tilde{F}(D)$を考える．

$$\tilde{F}(D)\equiv\{f: f=f_1+f_2,\ f_1\in\tilde{F}_\infty(D_1),\ f_2\in\tilde{F}_2(D_2)\} \tag{18}$$

ここで，Dは非負の実数の対$D\equiv(D_1,D_2)$を表す．このとき，

$$\hat{e}(\tilde{F}(D),c)=D_1\|e(h,c)\|_1+D_2\|e(h,c)\|_2 \tag{19}$$

が成立する．□

次の例は変化率に制限のある入力集合に対しては，ステップ応答の定常値に対する条件が満たされれば，適合を容易に達成できることを示している．

例2: Fig. 1の直結フィードバック系で$f_1=f\in\tilde{F}(D)$，$f_2=0$であり，$G(s)=1/s$，$K(s,c)=c>0$の場合を考える．このとき，明らかに応答$e_1(t,h,c)$の定常値は0である．また，応答$e_1(t,f,c)$のノルムについて，次の結果が成立する．

$$\|e_1(h,c)\|_1=1/c\ ,\ \ \|e_1(h,c)\|_2=1/\sqrt{2c} \tag{20}$$

上式から，変化率に制限のある3種類の入力集合に対しては，可調整パラメータcを十分大きくすることにより，$\hat{e}_1(\tilde{F}_\infty(D),c)$，$\hat{e}_1(\tilde{F}_2(D),c)$，$\hat{e}_1(\tilde{F}(D),c)$に対する任意の設計仕様$\varepsilon_1>0$に対して適合を達成する可調整パラメータを見出すことが可能である．□

上の例の結果は，最小位相系である制御対象に対して，積分動作を含む適当なコントローラを用いて拡張できる．

c. 振幅および変化率に制限を加えた入力集合

変化率に制約を加えた入力集合に対しては，例1で示したような振幅のみに制限を加えた場合に対する問題を回避できる．しかし，前に指摘したように，変化率に制約を加えた入力集合に対して適合を達成するためには，ステップ応答に対する定常値が0となることが要求される．しかし，次の例が示すように，複数個の応答を考える必要がある場合にはこの仮定を満足させることは必ずしも容易ではない．

例3: Fig. 1の直結フィードバック系で $f_1=f\in\tilde{F}(D)$，$f_2=0$である場合を考える．ステップ応答$e_i(t,h,c)\,(i=1,2)$の定常値を$\sigma_i\ (i=1,2)$とする．明らかに，$\sigma_1=0$であるた

めの必要十分条件は制御対象かコントローラのいずれかが積分動作を含むことである．一方，$\sigma_2 = 0$が成立するための必要十分条件は制御対象が積分動作を含むこと($G(0)=\infty$)である．すなわち，二つの応答$e_i(t,f,c)(i=1,2)$に対して適合を達成するためには，制御対象が積分動作を含む必要がある．従って，制御対象が積分動作を含まない場合には，コントローラが積分動作を含んでも，適合を達成することはできない．　□

上の例のように，着目している全ての応答に対するステップ応答の定常偏差を0とすることができない場合には，変化率のみに制限を加えた入力集合に対しては，応答が発散することが起こりうる．Zakian[15]はこのような問題点を回避するためには，振幅と変化率の両方に制限を加えた入力集合を用いる必要があることを次のように説明している．

式(11)の入出力関係は次のように書き換えられる．

$$e(t,f,c) = \sigma f(t) + \int_0^t f^{(1)}(t-\lambda)[e(\lambda,h,c)-\sigma]d\lambda \tag{21}$$

ここで，

$$\sigma \equiv \lim_{\lambda\to\infty} e(\lambda,h,c) \tag{22}$$

である．$f \in \widetilde{F}(D)$，$\|e(h,c)-\sigma\|_p < \infty$ $(p=1,2)$ と仮定すると，Hőlderの不等式により，式(21)右辺第2項は有界となる．従って，$\sigma \neq 0$のとき$\|e(f,c)\|_\infty < \infty$が成立するためには$\|f\|_\infty < \infty$のような振幅に対する制限が必要となる．

次のような振幅および変化量に制限のある入力集合を定義しよう．

$$F_\infty(M,D) \equiv \{f : \|f\|_\infty \le M,\ \|\dot{f}\|_\infty \le D,\ f(0)=0\} \tag{23}$$

$$F_2(M,D) \equiv \{f : \|f\|_2 \le M,\ \|\dot{f}\|_2 \le D,\ f(0)=0\} \tag{24}$$

上の入力集合を生起可能集合として選んだ場合，制御性能の臨界値$\hat{e}(F_\infty(M,D),c)$，$\hat{e}(F_2(M,D),c)$は現在では凸計画法により数値的に求めることができる[5) 14)]．Zakian[2)]はこのような手法が開発される以前に，適合のための十分条件を導いている．Rutland[7)11)]は振幅と変化量の重み付け和に対する制約を設けた新しい入力集合を導入し，判定容易な適合条件を導いている.その他にも，入力信号の積分値に制限を加えた集合や2階微分値に制限を加えた集合に対する適合条件も知られている[9)]．また，周波数領域における適合条件[8)]，離散時間系[9) 6)]やサンプル値制御系[9)]に対する適合条件，Youlaパラメトリゼーションを用いた適合系の特徴づけ[16)]等が報告されている．

C. 適合制御系の設計手順

適合原理による制御系の設計手順は次のようになる．

1) 制御対象のモデル化および環境のモデル化(生起可能集合Pの決定)を行い，可調整パラメータcを含むコントローラ$K(s,c)$の構造を決定する．
2) 制御系の設計仕様を複数個の応答に対する不等式制約 $\|e_i(f,c)\|_\infty \le \varepsilon_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$として与える．
3) 適合条件を用いて$\hat{e}_i(P,c)(i=1,2,\ldots,m)$を閉ループ制御系のステップ応答等のノルムを用いて表す．
4) 不等式制約$\hat{e}_i(P,c) \le \varepsilon_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$を満足する可調整パラメータcを適当な数値探索法で見出す．

上の手順で全ての不等式制約を満足するコントローラを見出すことができない場合

には，環境モデル，設計仕様ε_i，コントローラの構造等を変更し，再設計を試みる．

複数個の不等式制約を満足する可調整パラメータを数値的に探索する制御系設計手法は不等式制約法[2]と呼ばれている．この手法は最適性(Pareto最適性)にこだわらず，解の実行可能性を重視する手法である．Pareto最適解と「不等式制約法」の関係については文献15を参照されたい．

可調整パラメータの探索アルゴリズムとしては，境界移動法と呼ばれる簡単なアルゴリズムがしばしば用いられる．最近では，焼き鈍し法[17]や遺伝的アルゴリズムの適用[18][22]が試みられている．

4. 研究成果の概要

A. 適合原理に基づくクリティカル・サンプル値制御系の設計

近年，制御系のほとんどがディジタル計算機を用いて実現されている．ディジタルコントローラを設計する場合，サンプル時点での応答のみに着目した設計を行うことが多い．このような設計法は「離散時間制御系」と呼ばれる．これに対して，サンプル時点間の応答をも考慮した設計「サンプル値制御系」と呼ぶ．クリティカル制御問題では，制御対象の応答を全ての時間に対して指定値以下に抑えることが要求されるため，制御系を'サンプル値制御系'として設計することが望ましい．

適合原理によるクリティカル・サンプル値制御系の設計は既にWhidborneら[9]によりなされているが，以下のような問題点がある．

- 適合条件の導出が時変の入出力関係(時変の重み関数を含む畳み込み積分)に基づいているため，数値計算上の問題がある．
- 入力集合としては変化率に制限のある持続的信号のクラスのみが考察されており，他の入力集合に対する適合条件については考察されていない．

本研究では上記の問題点を解消するために，「リフティング(Lifting)」と呼ばれる手法を用いることにより，サンプル値制御系の設計問題を無限次元の離散時間時不変系として記述される制御対象に対する離散時間コントローラを設計する問題に帰着させ，いくつかの応用上重要な入力集合に対する適合条件を導出した[20][26][27]．この手法により，適合条件の判定を標準的な数値計算を用いて効率的に行うことが可能となった．さらに，適合条件の判定を'離散時間リフティング'と呼ばれる手法により適合条件を導出し，この手法により，実用上十分な精度での適合条件の判定を計算量を大幅に減少させて行うことが可能であることを明らかにした[24][28]．

B. 線形行列不等式によるクリティカル値制御系の設計

適合制御系の設計では適合を達成するコントローラを数値的な探索により求める必要がある．しかし，一般に，適合条件を与える複数個の不等式制約はコントローラのパラメータの非線形不等式として与えられるため，その解の存在をあらかじめ保証することができず，また，解が存在する場合でも，その唯一性が保証されないことが多い．この点は適合制御系設計における大きな問題点である．

一方，最近，多くの制御系設計問題は「線形行列不等式(Linear Matrix Inequality, LMI)」を用いて記述できることが最近明らかにされている．この線形行列不等式は「内点法(Interior point method)」により効率的に数値解を求めることが出来ることが知られている．しかし，一般に，適合のための必要十分条件を線形行列不等式により記述することは困難である．そこで，本研究では，クリティカル制御問題に対して，適合のための十分条件を線形行列不等式で記述することを提案し，その有効性について検討した[25][29]．また，これとは異なるアプローチとして，適合条件を満たす開ループモ

デルをあらかじめ求めておき(この問題は適合条件を満たすコントローラを見出すものより容易である), 実際の制御対象を含む閉ループ系の特性がこのモデルの特性をH^{∞}ノルムの意味で近似するようにコントローラを決定する問題を線形行列不等式により定式化した[30]. これらの結果は, 適合系設計の問題点を解消する一つの方向を示すものと考えられる.

5. おわりに

今後, 制御対象の不確定性を陽に考慮したクリティカル制御系の設計法について考察する必要がある. また, 適合系の設計に適したパラメータ探索アルゴリズムを開発する必要があろう.

謝辞

本研究に対して多大なご支援を賜った, 財団法人石田(實)記念財団に衷心より感謝の意を表する.

文献

1) V. Zakian and U. Al-Naib, "Design of dynamical and control systems by the method of inequalities," Proc. IEE, 120, 11, 1421/1427 (1973)
2) V. Zakian, "New formulation for the method of inequalities," Proc. of IEE, 126, 579/584 (1979)
3) A. T. Bada, "CRITERIA-a package for computer aided control system design, Computer-aided Design," 19, 466/474 (1987)
4) V. Zakian, "Critical systems and tolerable inputs," Int. J. of Control., 49, 1285/1289 (1991)
5) S. P. Boyd and C. H. Barret, Linear Controller Design: Limits of Performance, Prentice Hall (1991)
6) G P. Liu, "Disturbance spaces and sup regulators in discrete time," Systems & Control Letters, 18, 33/38 (1992)
7) N.K. Rutland, "Illustration of a new principle of design: vehicle speed control," Int. J. Control, 55, 6, 1319/1334 (1992)
8) G P. Liu, "Input space and output performance in frequency-domain for critical systems," IEEE Trans. on Automatic Control, 38, 152/155 (1993)
9) J. F. Whidborne and G.P. Liu, Critical Control Systems, Somerset Research Studies Press (1993)
10) J. F. Whidborne, "EMS control system design for a maglev vechicle-A critical system," Automatica, 29, 5, 1345/1349 (1993)
11) N.K. Rutland, "The principle of matching: practical conditions for systems with inputs restricted in magnitude and rate of change," IEEE Trans. Automatic Control, 39, 3, 550/553 (1994)
12) N.K. Rutland, "Illustration of the principle of matching with inputs restricted in magnitude and rate of change: vehicle speed control revisited," Int. J. Control, 60, 3, 395/412 (1994)
13) T.K. Liu, T. Ishihara and H. Inooka, "An application of genetic algorithms to control